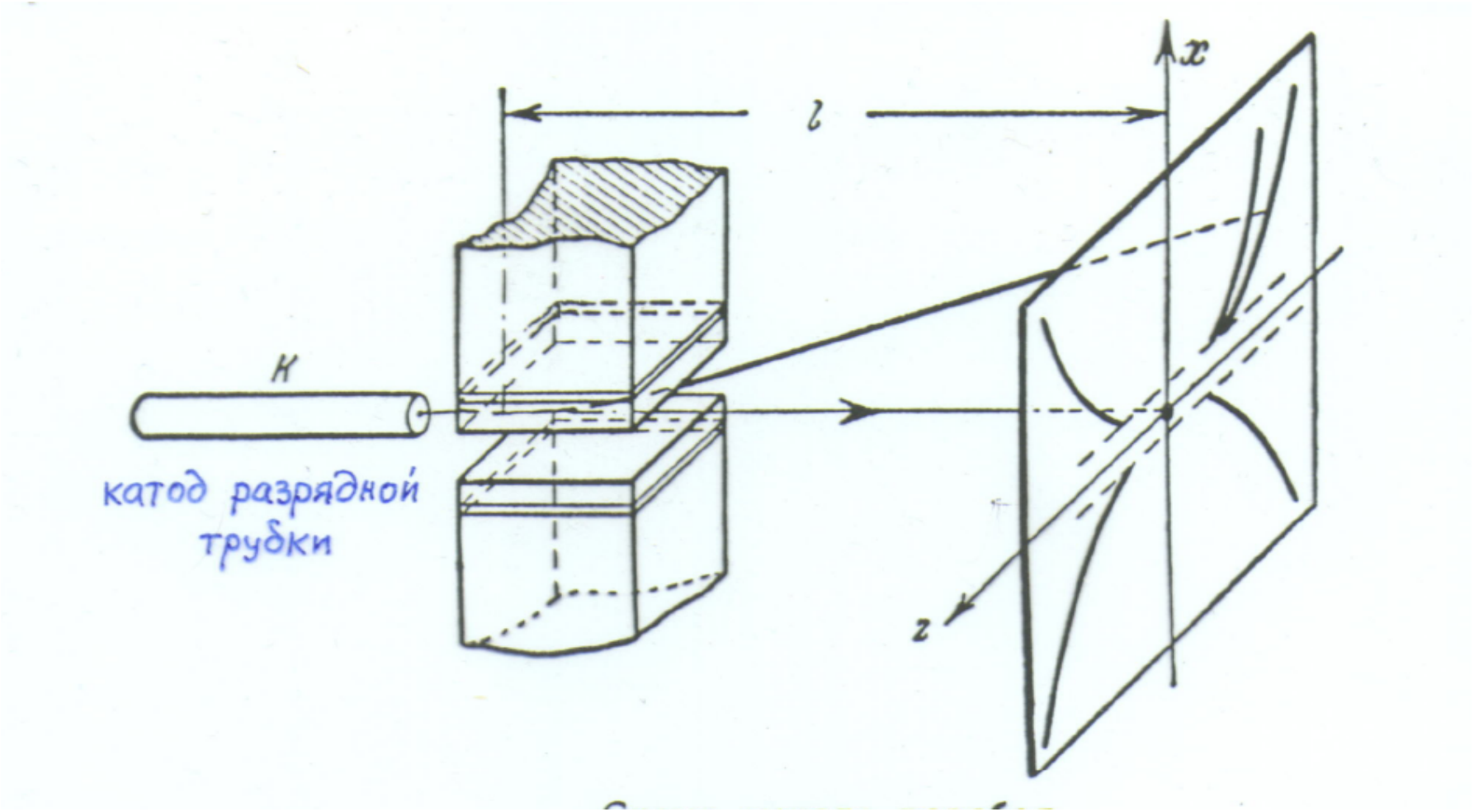
Структура атомных ядер: современные модели

Часть 1. Свойства ядер. Капельная модель.

И. М. Павличенков

Метод парабол (Томсон 1907 г.)



Отклонение в электрическом поле

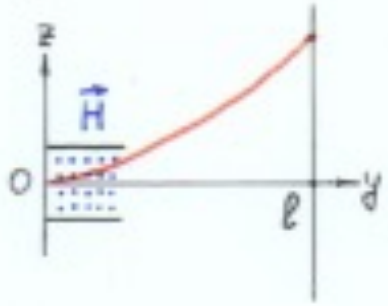
$$M\frac{d^2x}{dt^2} = eE(y) \Rightarrow Mv^2\frac{d^2x}{dy^2} = eE(y)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dy}\right) \approx v\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy}\right) \approx v^2\frac{d^2x}{dy^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e}{Mv^2}\int_0^{y_0} E(y)\,dy$$

$v_y = v \approx const$ $\quad x = \frac{e}{Mv^2}\int_0^{\ell} dy_0 \int_0^{y_0} E(y)\,dy = \frac{e}{Mv^2}\int_0^{\ell}(\ell - y)E(y)\,dy = \frac{eA}{Mv^2}$ $\quad v_x \ll v_y$

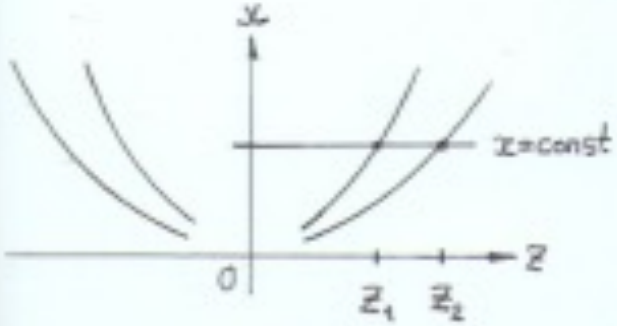
Отклонение в магнитном поле



$$M\dot{\vec{v}} = \frac{e}{c}[\vec{v}\cdot\vec{H}] \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = \mp\frac{ev}{Mc}H(y),\ \vec{H}(\pm H\,0\,0)$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \mp\frac{e}{Mcv}H(y) \Rightarrow z = \mp\frac{e}{Mcv}\int_0^{\ell}(\ell - y)H(y)\,dy = \mp\frac{eB}{Mv}$$

Парабола



$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{eA}{Mv^2} \\ z &= \mp\frac{eB}{Mv} \end{aligned}\right\} x = \frac{A}{B^2}\cdot\frac{M}{e}z^2$$

$e_1 = e_2$: $\frac{M_1}{M_2} = \frac{z_2^2}{z_1^2}$

Разрешающая способность $> 1/600$

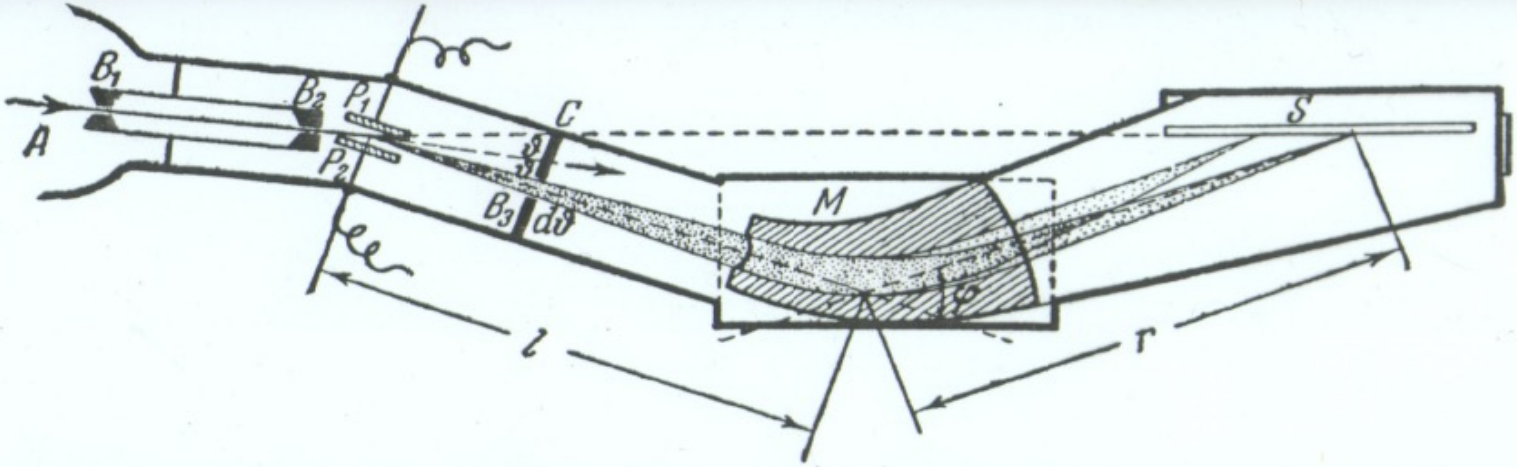


Схема масс-спектрографа Астона

B_1, B_2 – коллиматорные щели

$P_1 P_2$ – конденсатор. Отклонение пучка $\sim \frac{e}{Mv^2}$

C – экран со щелью B_3, $d\vartheta$ – угловая ширина пучка

M – область магнитного поля, $\vec{H} \perp E$. Радиус кривизны траектории $\sim \frac{Mv}{e}$

S – фотопластинка

Отклонение пучка ионов в конденсаторе $z = \frac{ed^2}{2Mv^2}E$

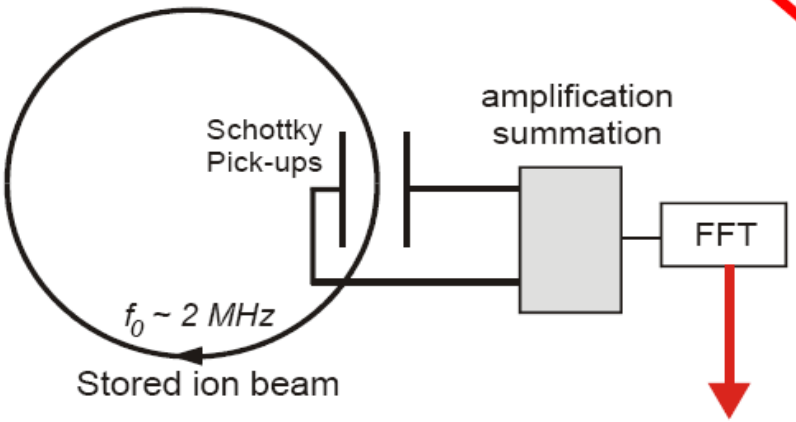
Угол отклонения пучка $tg\vartheta = \frac{z}{d} = \frac{ed}{2Mv^2}E$

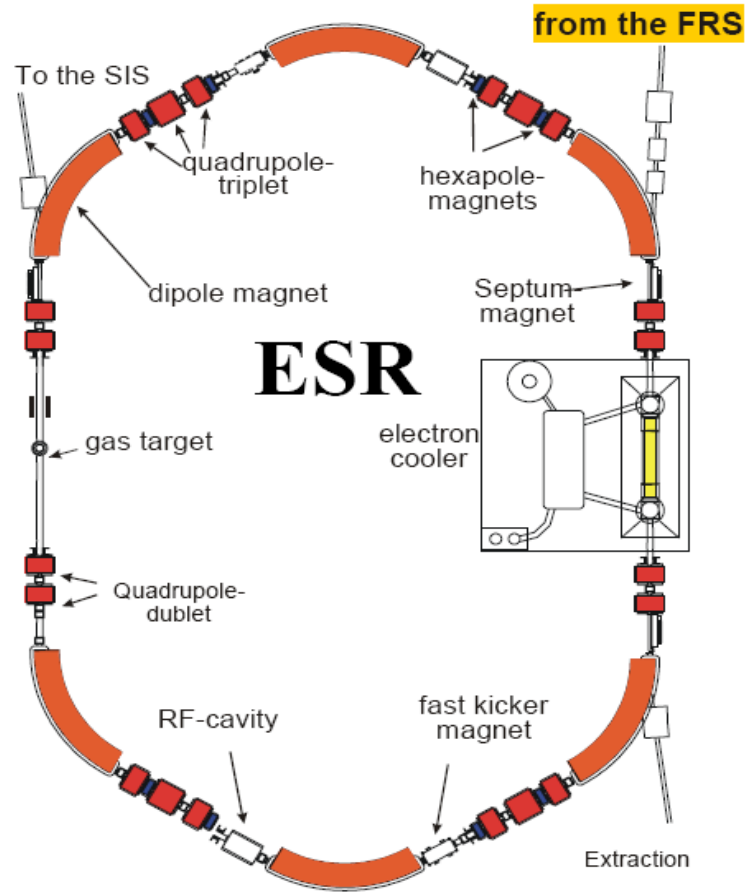
Условие фокусировки пучка:

$$(l+r)d\vartheta = r d\varphi \quad \text{или} \quad r = \frac{2l\vartheta}{\varphi - 2\vartheta}$$

Schottky-Noise Detection

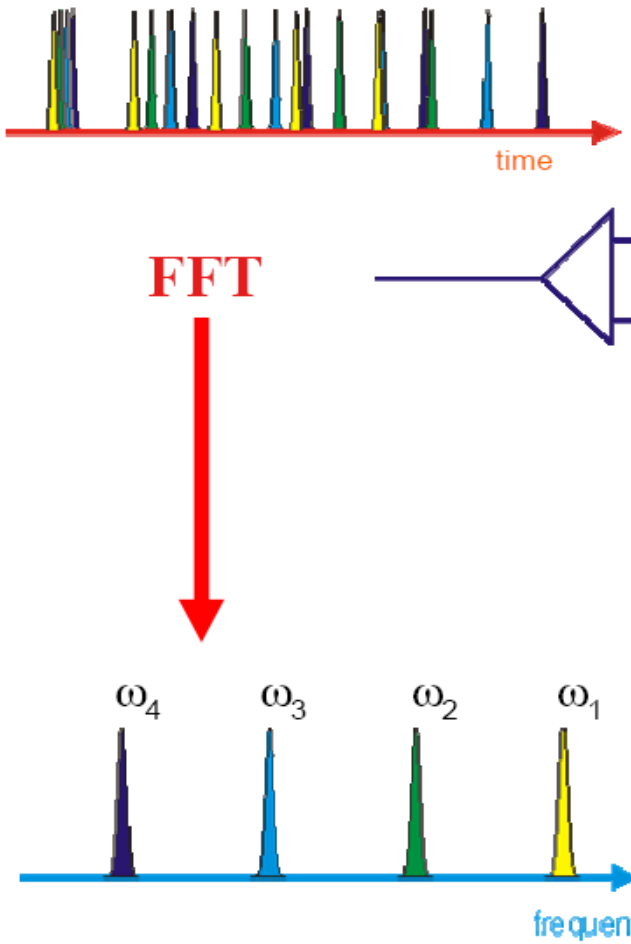
Schottky pick-ups

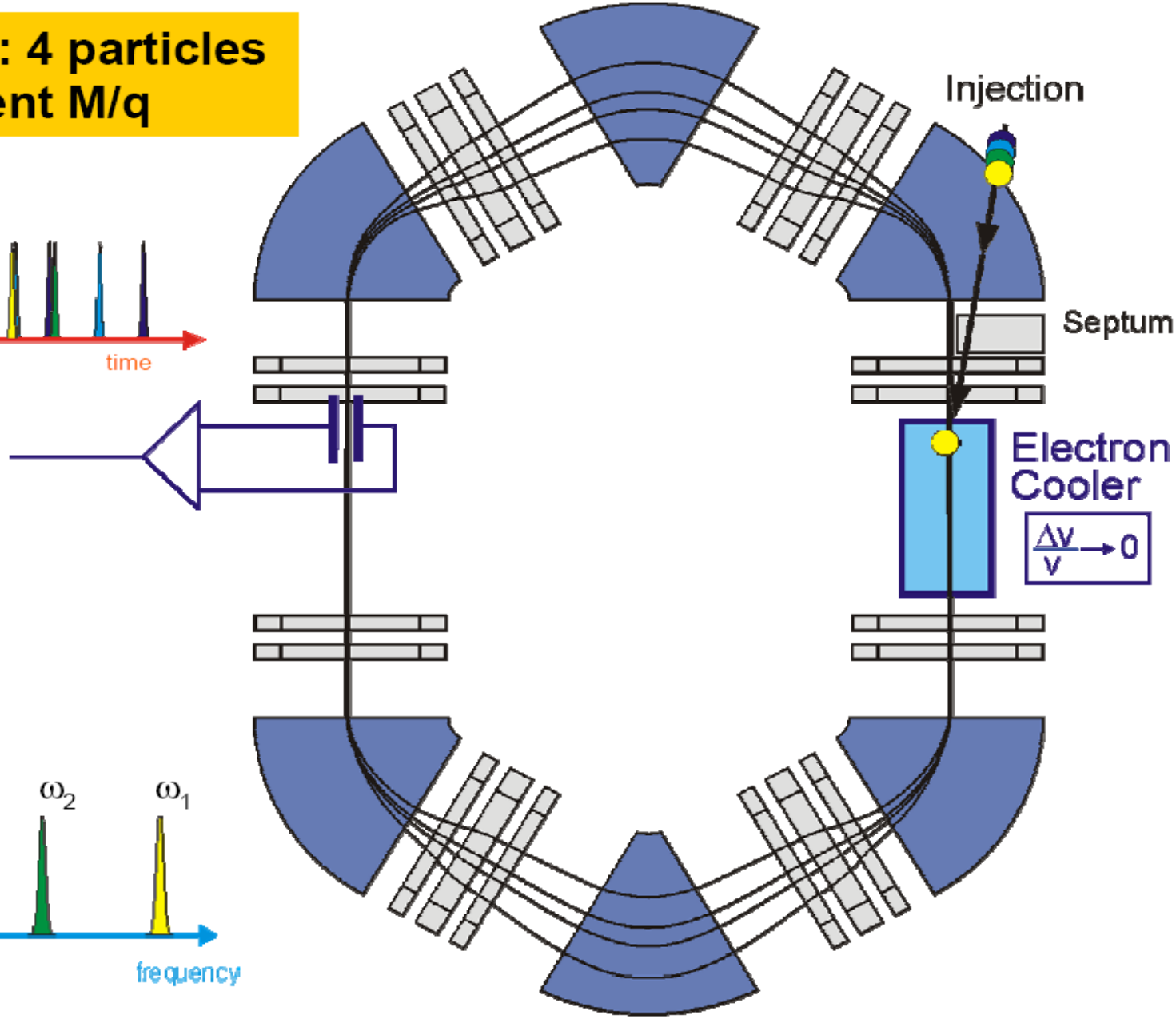




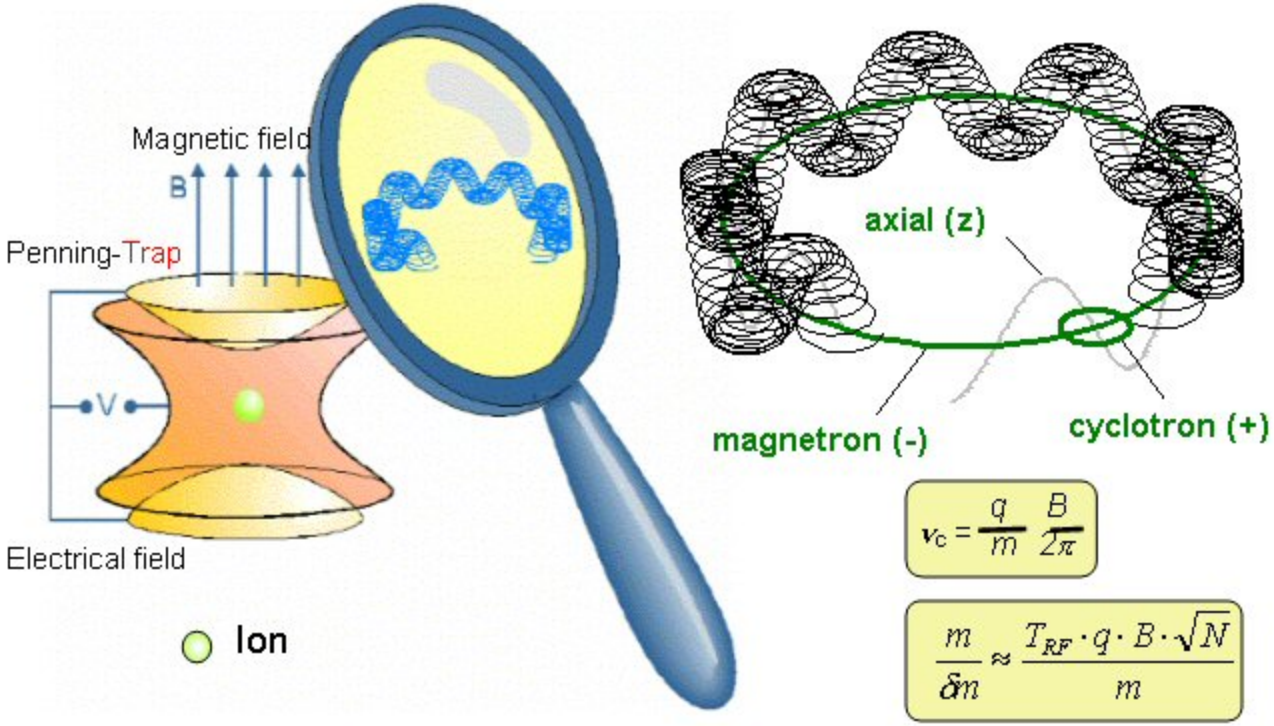
Continious digitizing and data storage for 1,2,3, … stored ions

illustration: 4 particles with different M/q



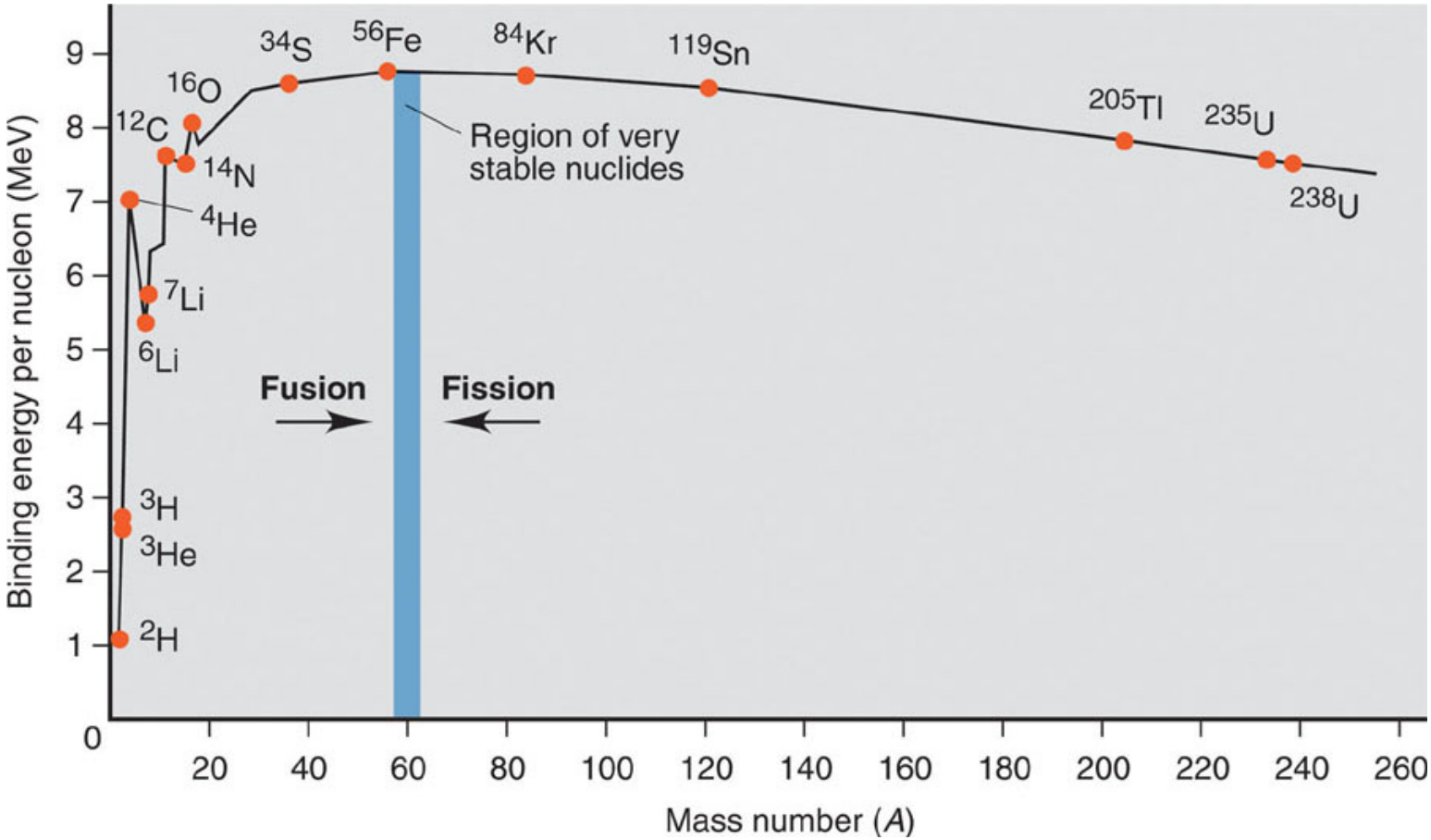


Penning trap



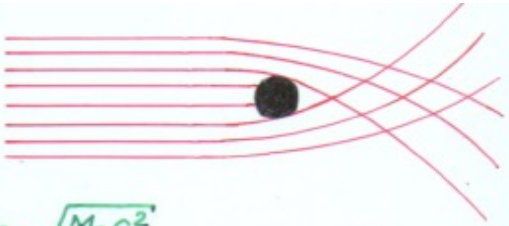
ν_c: cyclotron frequency q: charge of the ion m: ion mass B: magnetic field strength

Средняя энергия связи нуклона в ядре



Радиус ядра (Хофштадтер 1960 г.)

Длина волны $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p}$



Протоны: $E = \frac{p^2}{2M_p}$, $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{\sqrt{2M_pE}} = \lambda\!\!\!^{-}_p\sqrt{\frac{M_pc^2}{E}}$

Комптоновская длина волны протона $\lambda\!\!\!^{-}_p = \frac{\hbar}{M_pc} = 0.2103\,ф$

Электроны: $E_{kin} = cp$, $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar c}{E_{kin}} = \lambda\!\!\!^{-}_e\frac{mc^2}{E_{kin}}$

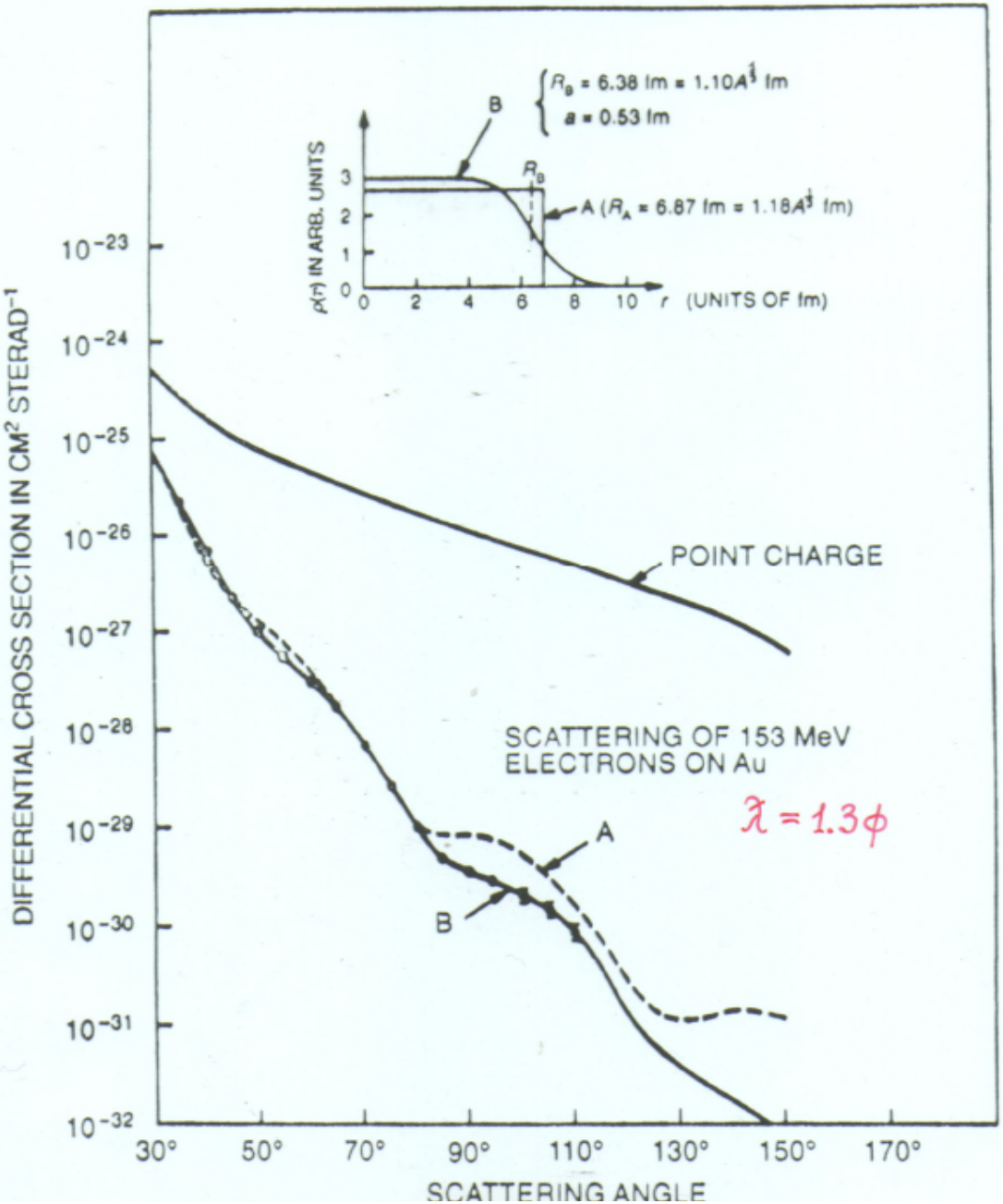
Комптоновская длина волны электрона $\lambda\!\!\!^{-}_e = \frac{\hbar}{mc} = 386.2\,ф$

Функция Ферми $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+\exp\left(\frac{r-R_B}{a}\right)}$, $\frac{a}{R_B} \ll 1$

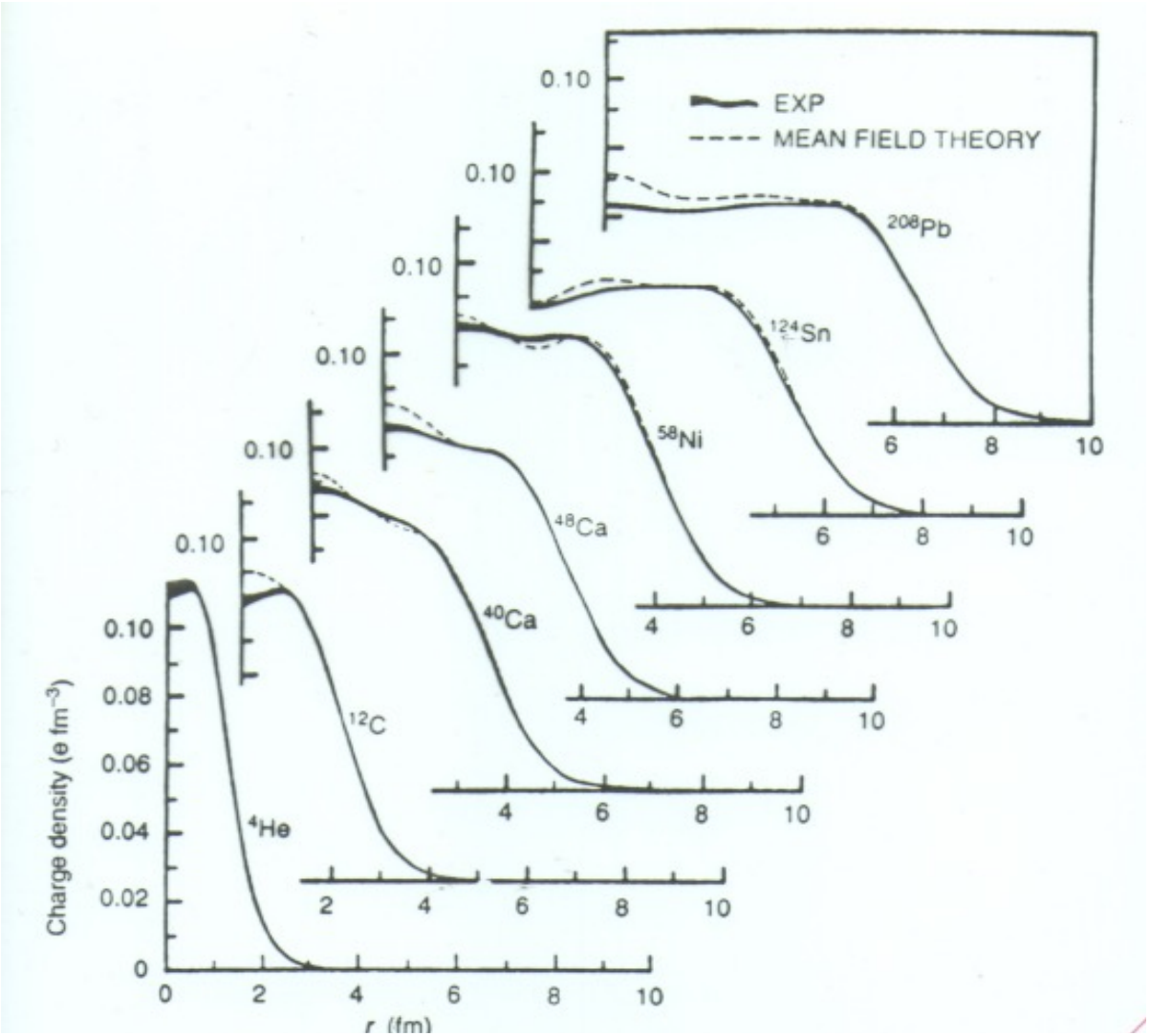
Среднеквадратичный радиус:

$$R = \left(\frac{5}{3}\frac{\int\rho(r)r^2d^3r}{\int\rho(r)d^3r}\right)^{1/2} \approx 1.2\,A^{1/3}\,ф$$

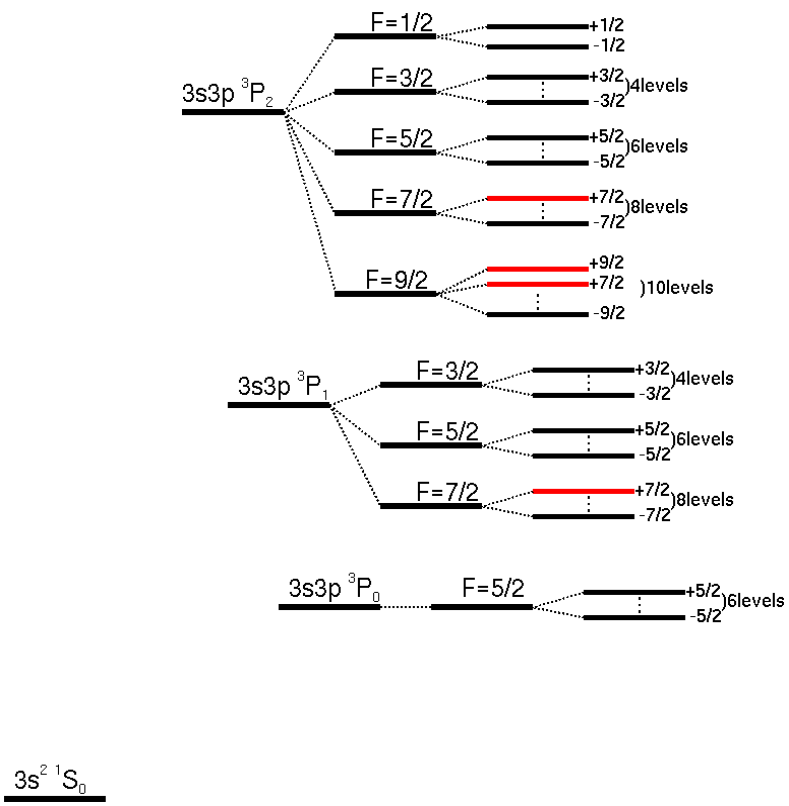
$\rho(r) = \rho_p(r) + \rho_n(r)$ $\qquad 1ф = 10^{-13}$ см


R_B = 6.38 fm = 1.10$A^{\frac{1}{3}}$ fm
a = 0.53 fm
B
R_B
A (R_A = 6.87 fm = 1.18$A^{\frac{1}{3}}$ fm)
$\rho(r)$ IN ARB. UNITS
0
1
2
3
0
2
4
6
8
10
r (UNITS OF fm)
DIFFERENTIAL CROSS SECTION IN CM^2 STERAD^{-1}
10^{-23}
10^{-24}
10^{-25}
10^{-26}
10^{-27}
10^{-28}
10^{-29}
10^{-30}
10^{-31}
10^{-32}
POINT CHARGE
SCATTERING OF 153 MeV
ELECTRONS ON Au
$\lambda\!\!\!^{-} = 1.3\phi$
A
B
30°
50°
70°
90°
110°
130°
150°
170°
SCATTERING ANGLE

Плотность распределения заряда в магических ядрах



Сверхтонкая структура спектра атома Mg



Observable resonance line
(Assume I = 5/2)

$3s3p\,^3P_2$ F=9/2 ⇔ F=7/2

[h.f.s = (9/2)A + (27/40)B]

F=7/2 ⇔ F=5/2

[h.f.s = (7/2)A + (7/40) B]

($3s3p\,^3P_1$ F=7/2 ⇔ F=5/2)

Спин ядра $\vec{I} = \sum_{n=1}^{A} \vec{j}_n$

Магнитный момент ядра $\vec{\mu}_N = \mu_N \vec{I} / \sqrt{I(I+1)}$

Магнитный момент электронов $\vec{\mu}_e = -\mu_e \vec{J} / \sqrt{J(J+1)}$

Энергия их взаимодействия

$$H_{hf} = (\vec{\mu}_N \vec{\mu}_e) / r^3 = -a\mu_N (\vec{I}\vec{J}) / \sqrt{I(I+1)J(J+1)}$$

Энергия атомного уровня $E = E_{nJ} + \Delta E_{LS} + \Delta E_{JI}, \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{J}$

$$\Delta E_{JI} = -\frac{a}{2}\mu_N [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)] / \sqrt{J(J+1)I(I+1)}$$

Полный момент атома $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}, \quad F = J + I, J + I - 1, \ldots, |J - I|$

Число компонент сверхтонкой структуры $\begin{cases} 2I+1, & J > I \\ 2J+1, & J < I \end{cases}$

Магнитный момент ядра

Магнетон Бора $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2mc} = 5.788\times10^{-11}\, MeV/T$

Ядерный магнетон $\mu_0 = \dfrac{e\hbar}{M_p c} = \dfrac{\mu_B}{1836}$

Магнитный момент ядра $\vec{\mu} = g\mu_0\vec{I}$

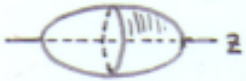
Дипольный момент ядра

$$D_z = \sum_{k=1}^{Z}\int e z_k |\Psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_A)|^2 d\tau = 0, \text{ т.к. } |\Psi(-\vec{r}_1,\dots,-\vec{r}_A)|^2 = |\Psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_A)|^2$$

значит $\rho_p(r)/\rho_n(r) = const$

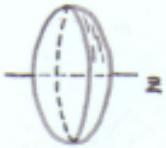
Квадрупольный момент ядра

$$Q_0 = \sum_{k=1}^{Z}\int e(3z_k^2 - r_k^2)|\Psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_A)|^2 d\tau \text{ в } eb, \quad 1b = 1\text{барн} = 10^{-24}\text{см}^2$$



$Q_0 > 0$

$$Q_0 = \frac{2}{5}eZ(a_z^2 - a_x^2) = \frac{4}{5}eZR^2\frac{\Delta a}{a}$$



$Q_0 < 0$

Наблюдаемая величина:

$$Q = \langle\hat{Q}\rangle_{I,M=I} = \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)}Q_0$$

Квадрупольное сверхтонкое расщепление:

$$V_Q = a\sum_{i,j} Q_{ij} J_i J_k, \quad \Delta E_Q = F(F+1)\{F(F+1) - 2I(I+1) - 2I(I+1) + 1\}Q_0 a$$

Капельная модель ядра

Постоянство плотности нуклонов

Насыщение ядерных сил

Объемная энергия $E_V = \alpha A$

Поверхностная энергия $E_S = -\beta A^{2/3}$

Кулоновская энергия $E_C = -\gamma \dfrac{Z^2}{A^{1/3}}$

Энергия симметрии $E_{SM} = -\varepsilon \dfrac{(A/2 - Z)^2}{A}$

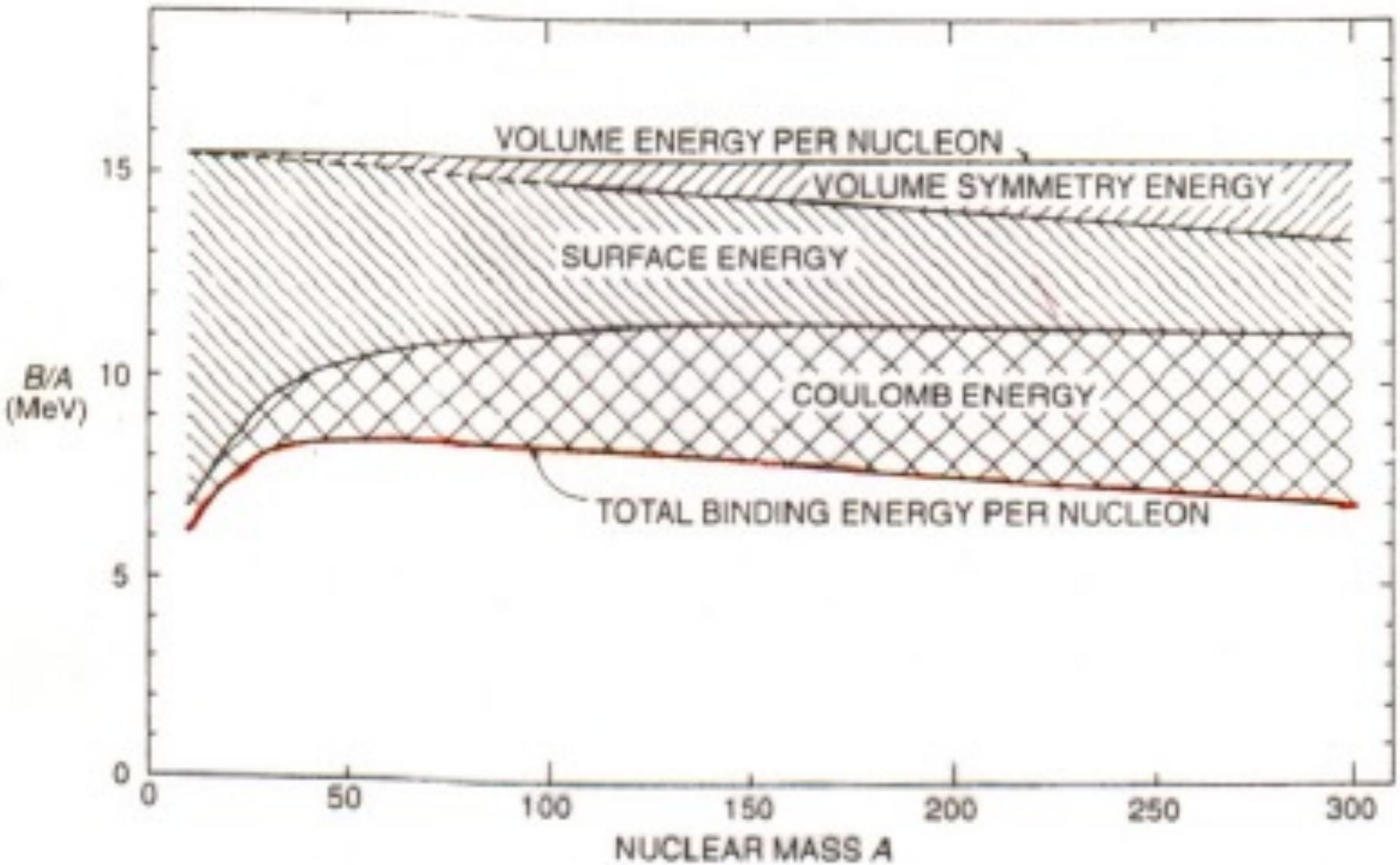
Поправка на четность нуклонов

$$\delta = \begin{cases} +12A^{-1/2}MeV & \text{четн.-четн.} \\ 0 & \text{нечетн.} \\ -12A^{-1/2}MeV & \text{неч.-неч.} \end{cases}$$

$$B = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{\varepsilon}{A}(A/2 - Z)^2 + \delta$$

$$\alpha = 15.75MeV, \quad \beta = 17.8MeV, \quad \gamma = 0.71MeV, \quad \varepsilon = 94.8MeV$$

Вклад первых четырех слагаемых формулы Вейцзекера в среднюю энергию связи на нуклон

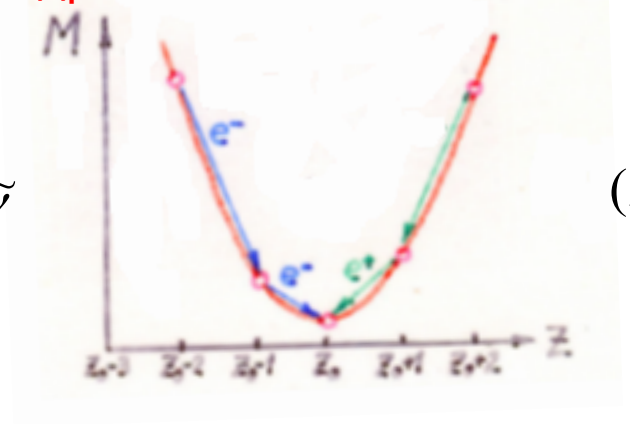


β – стабильные ядра

$$M = ZM_p + (A-Z)M_n - B, \qquad \partial M / \partial Z = 0, \qquad Z_0 = \frac{A}{1.98 + 0.015A^{2/3}}$$

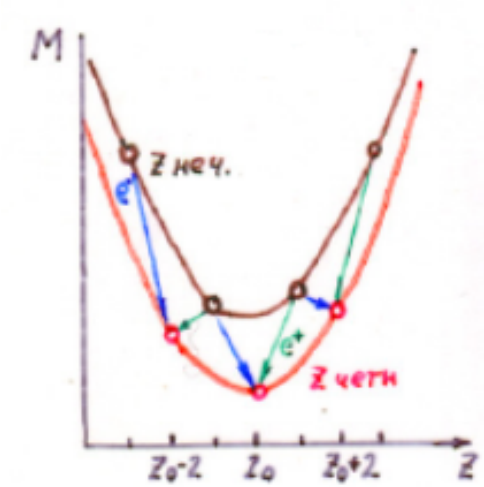
Ядра с нечетным A=const.

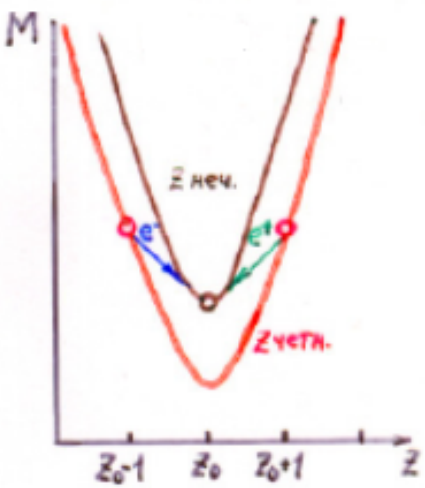
$$(A,Z) \to (A,Z+1) + e^- + \tilde{\nu}$$



$$(A,Z) \to (A,Z-1) + e^+ + \nu$$

Ядра с четным A=const.



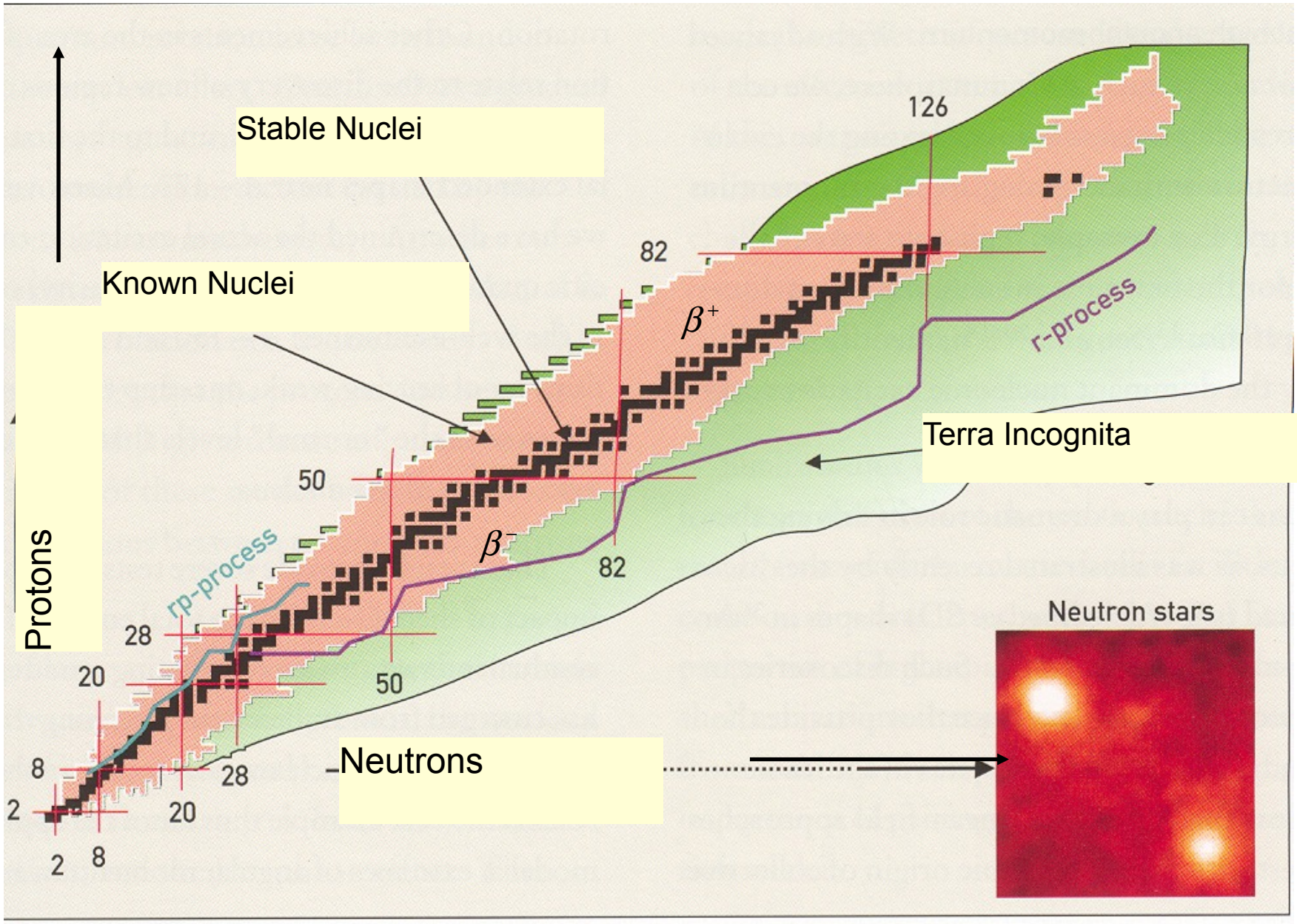


$^{2}_{1}H$

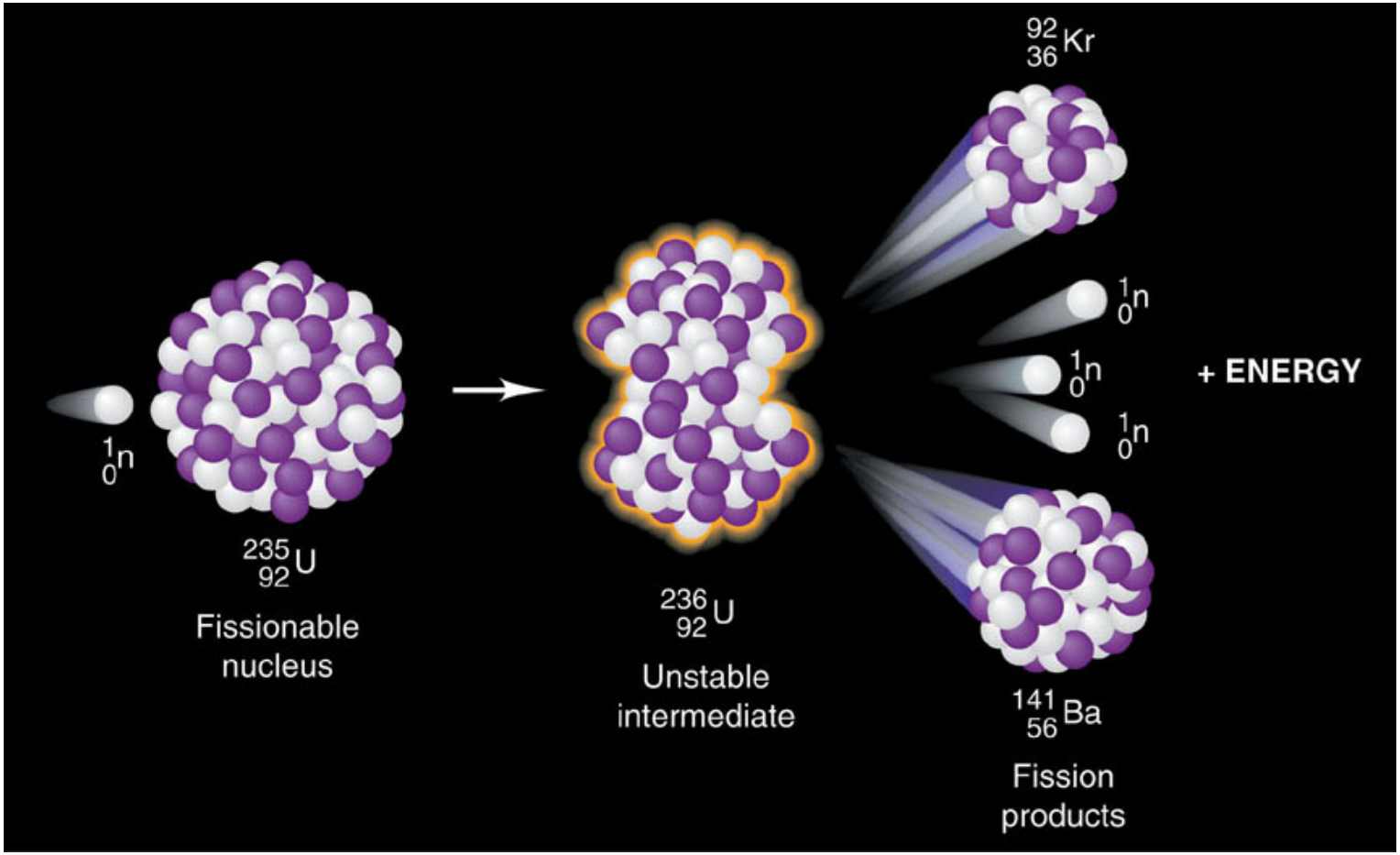
$^{6}_{3}Li$

$^{10}_{5}B$

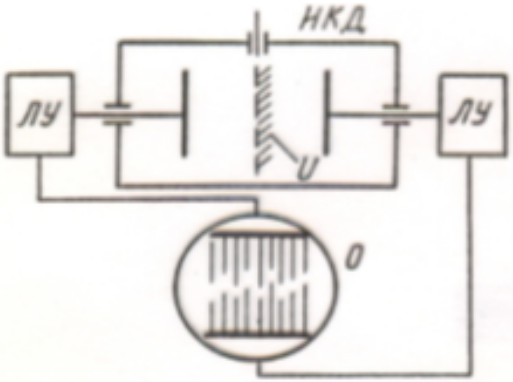
$^{14}_{7}N$

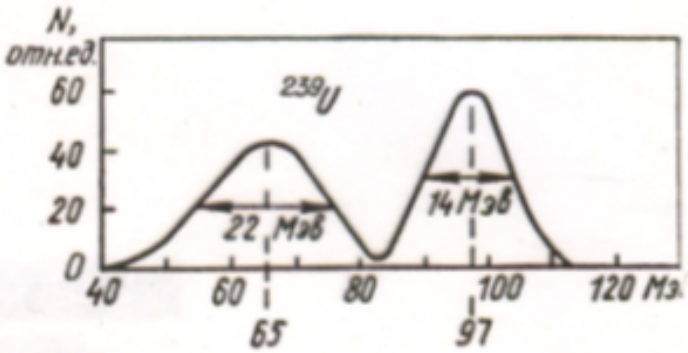

Stable Nuclei
Known Nuclei
Protons
Neutrons
Terra Incognita
rp-process
r-process
Neutron stars
β^+
β^-
126
82
50
28
20
8
2

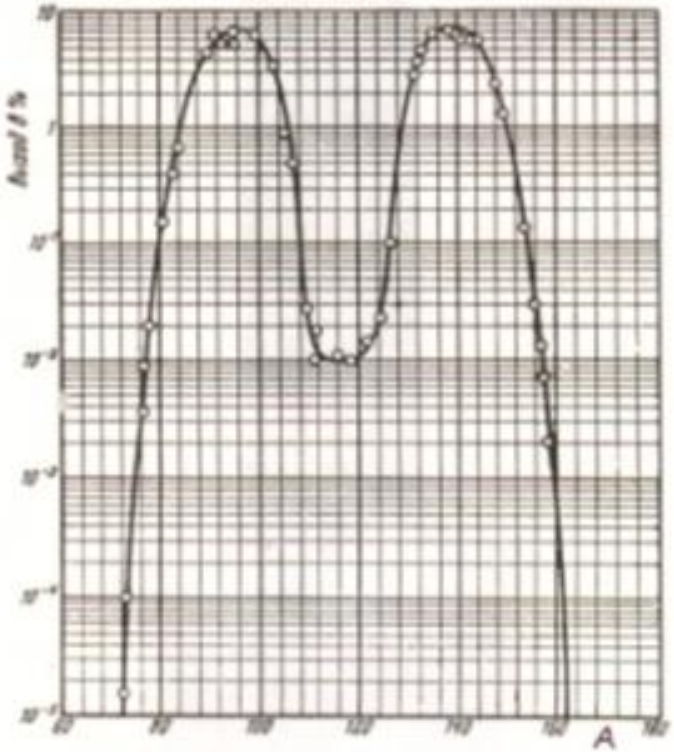
Вынужденное деление ядра урана



Определение масс осколков деления







Кривая выхода осколков деления U-235

Энергия деления

$$Q_f = B(A_1Z_1) + B(A_2Z_2) - B(AZ) = \Delta E_S + \Delta E_C = -0.25\beta A^{2/3} + 0.36\gamma\frac{Z^2}{A^{1/3}} > 0$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{3} \qquad \frac{Z^2}{A} > 0.69\frac{\beta}{\gamma} = 17$$

Могут делиться ядра тяжелее $^{108}_{47}Ag$

Зависимость энергии деления от деформации ядра

$$V(\varepsilon) = E_S(AZ, \varepsilon = 0)(1 + 2\varepsilon^2/5) + E_C(AZ, \varepsilon = 0)(1 - \varepsilon^2/5) -$$

$$- E_S(A_1Z_1) - E_S(A_2Z_2) - E_C(A_1Z_1) - E_C(A_2Z_2) =$$

$$= Q_f + \frac{\varepsilon^2}{5}[2E_S(AZ) - E_C(AZ)] = Q_f + \frac{\varepsilon^2\gamma}{5}\left(\frac{2\beta}{\gamma} - \frac{Z^2}{A}\right)A^{2/3}, \qquad \frac{2\beta}{\gamma} \approx 49$$

Энергетический баланс деления U-235 тепловыми нейтронами

Кинетическая энергия осколков	168	*Мэв*
Энергия нейтронов деления	5	»
Энергия мгновенных γ-квантов	7	»
Энергия β-частиц продуктов деления	8	»
Энергия γ-излучения продуктов деления	7	»
Энергия антинейтрино продуктов деления	10	»
Всего	205	*Мэв*

Цепная реакция

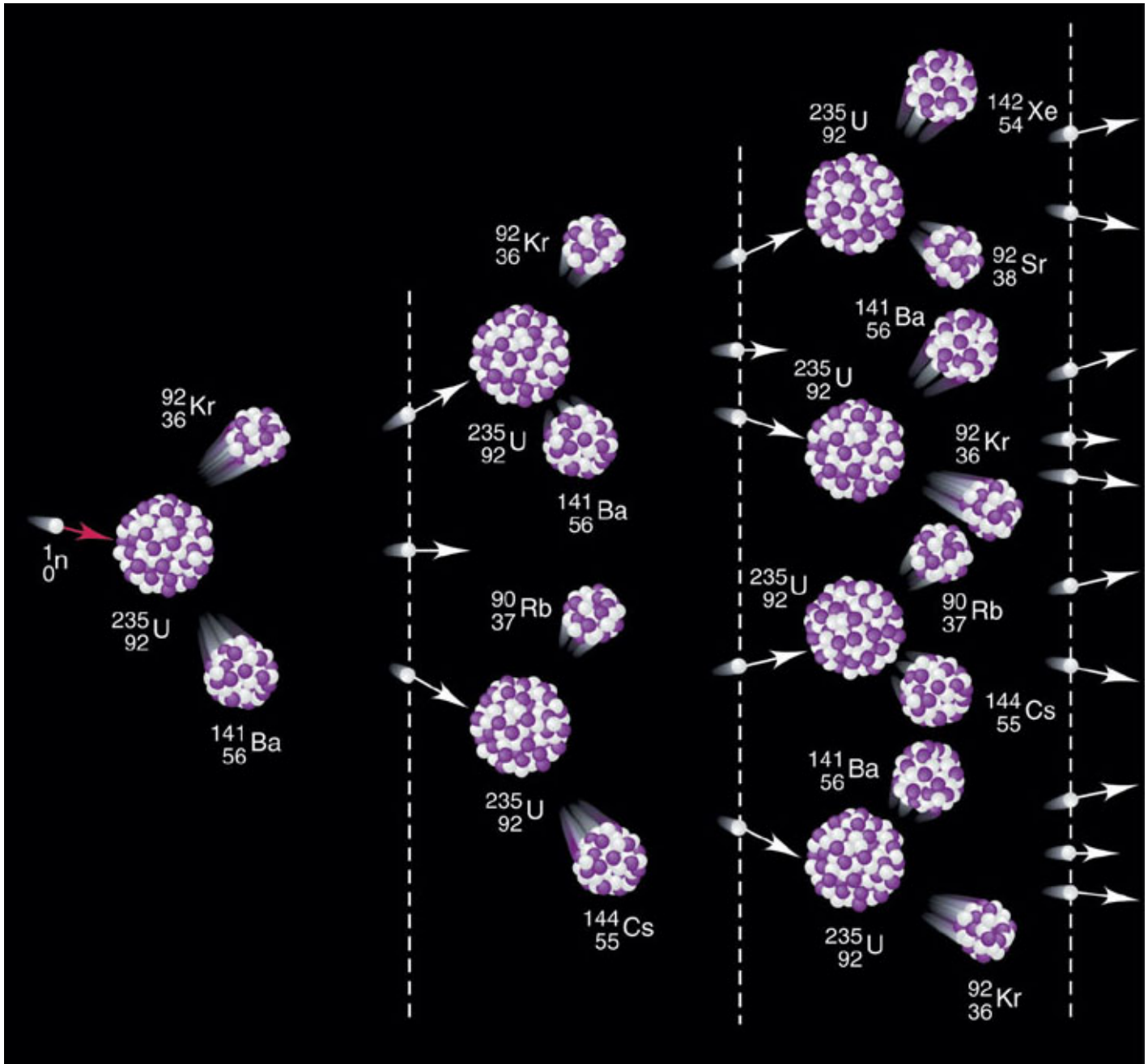


Схема атомной бомбы

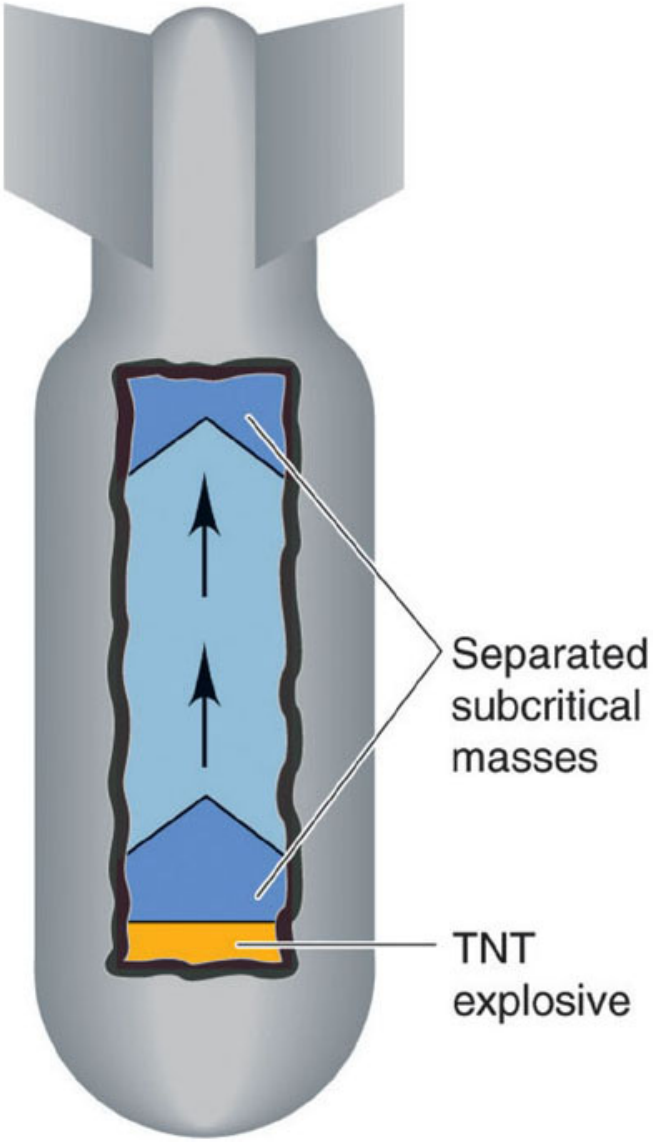
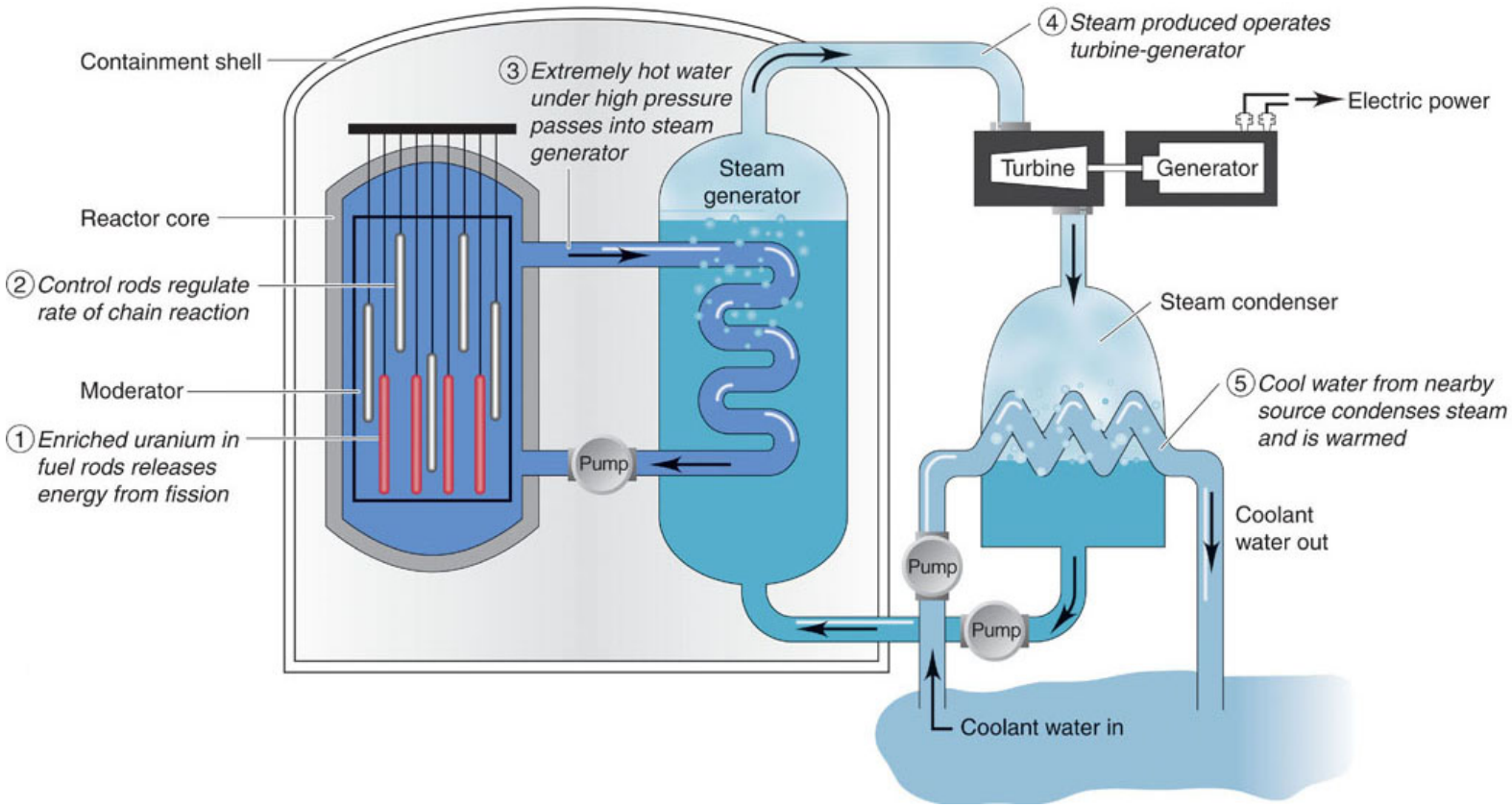



Схема атомной электростанции